Formelsammlung für Regelungstechnik 1

Hochschule Heilbronn
Wintersemester 2005/2006
Mechatronik und Mikrosystemtechnik

Verfasser:
Manuel Kühner (MM5)

erstellt mit LaTeX

Inhaltsverzeichnis

1 Griechische Buchstaben

A	α	Alpha	N	ν	Ny
B	β	Beta	Ξ	ξ	Xi
Γ	γ	Gamma	O	o	Omikron
Δ	δ	Delta	Π	π	Pi
E	ϵ	Epsilon	P	ρ	Rho
Z	ζ	Zeta	Σ	σ	Sigma
H	η	Eta	T	τ	Tau
Θ	θ	Theta	Y	υ	Ypsilon
I	ι	Joba	Φ	φ	Phi
K	κ	Kappa	X	χ	Chi
Λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	Psi
M	μ	My	Ω	ω	Omega

2 Sonstiges

2.1 quadratische Gleichungen

Ausgangsgleichung hat folgende Form:

$$x^2 + px + q = 0 \tag{2.1.1}$$

dann gilt:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \tag{2.1.2}$$

Ausgangsgleichung hat folgende Form:

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{2.1.3}$$

dann gilt:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2.1.4}$$

2.2 binomische Formeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{2.2.1}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \tag{2.2.2}$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \tag{2.2.3}$$

2.3 Logarithmengesetze

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \tag{2.3.1}$$

$$\log_a(x^r) = r \log_a(x) \tag{2.3.2}$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y) \tag{2.3.3}$$

$$\log_a\left(\sqrt[n]{x}\right) = \log_a\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{\log_a(x)}{n} \tag{2.3.4}$$

2.4 Wurzeln

$$x = \sqrt[n]{a} \tag{2.4.1}$$

- n - Wurzelexponent
- a - Radikand

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{a} &= a^{\frac{1}{n}} && (2.4.2)\\
\sqrt[n]{a^m} &= \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} && (2.4.3)\\
\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} &= \sqrt[n]{ab} && (2.4.4)\\
\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} &= \sqrt[n]{\frac{a}{b}} && (2.4.5)\\
\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} &= \sqrt[nm]{a} && (2.4.6)\\
\sqrt[n]{a}\,\sqrt[m]{a} &= \sqrt[nm]{a^{n+m}} && (2.4.7)\\
\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} &= \sqrt[nm]{a^{m-n}} && (2.4.8)
\end{aligned}$$

2.5 Wichtige Systemfunktionen

Testfunktionen:

- Eingangsgrößen: $u(t)$ bzw. $u(s)$
- Ausgangsgrößen: $y(t)$ bzw. $y(s)$ $[= G(s)u(s)]$

Bezeichnung	$u(t)$	$u(s)$	$g(t)$	$y(s)$	Bezeichnung
Impuls	$\delta(t)$ Delta	1	$g(t)$	$G(s) \cdot 1 = G(s)$	Impulsantwort, Gewichtsfunktion
Sprung	$\sigma(t)$ Sigma	$\frac{1}{s}$	$h(t)$	$G(s) \cdot \frac{1}{s} = H(s)$	Sprungantwort, Übergangsfunktion
Rampe	t	$\frac{1}{s^2}$	$r(t)$	$G(s) \cdot \frac{1}{s^2} = R(s)$	Rampenantwort

- Impuls $\cdot \frac{1}{s}$ = Sprung (entspricht Integration im Zeitbereich $\rightarrow \int dt$)
- Sprung $\cdot \frac{1}{s}$ = Rampe (entspricht Integration im Zeitbereich)
- Rampe $\cdot s$ = Sprung (entspricht Ableitung im Zeitbereich $\rightarrow \frac{d}{dt}$)
- Sprung $\cdot s$ = Impuls (entspricht Ableitung im Zeitbereich)

3 Linearisierung

3.1 Linearisierung einer statischen Kennlinie mit einer Variablen

Zu statischen nicht linearen Kennlinien zählen z.B. **Geraden die nicht durch den Ursprung** gehen und **Parabeln**.

3.1.1 anschauliche Vorgehensweise

- Wahl eines Arbeitspunktes auf der Kennlinie.
- Dieser AP ist Ursprung eines neuen Koordinatensystems.
- Die nichtlieneare Kennlinie wird näherungsweise durch eine Ursprungsgerade im neuen Koordinatensystem beschrieben (Tangente).

3.1.2 formale Vorgehensweise (Taylor-Reihe)

Es wird nur bis zur ersten Ordnung entwicklet (AP $\rightarrow$ Entwicklungsstelle).

$$\begin{aligned}
y &= f(u) \\
y &= \underbrace{f(u_0)}_{=y_0} + \left.\frac{df}{du}\right|_{u=u_0} \Delta u + \ldots \text{ höhere Ordnung} \\
y - y_0 = \Delta y &= \left.\frac{df}{du}\right|_{u=u_0} \Delta u
\end{aligned}$$

3.2 Linearisierung einer statischen Kennlinie mit mehreren unabh. Variablen

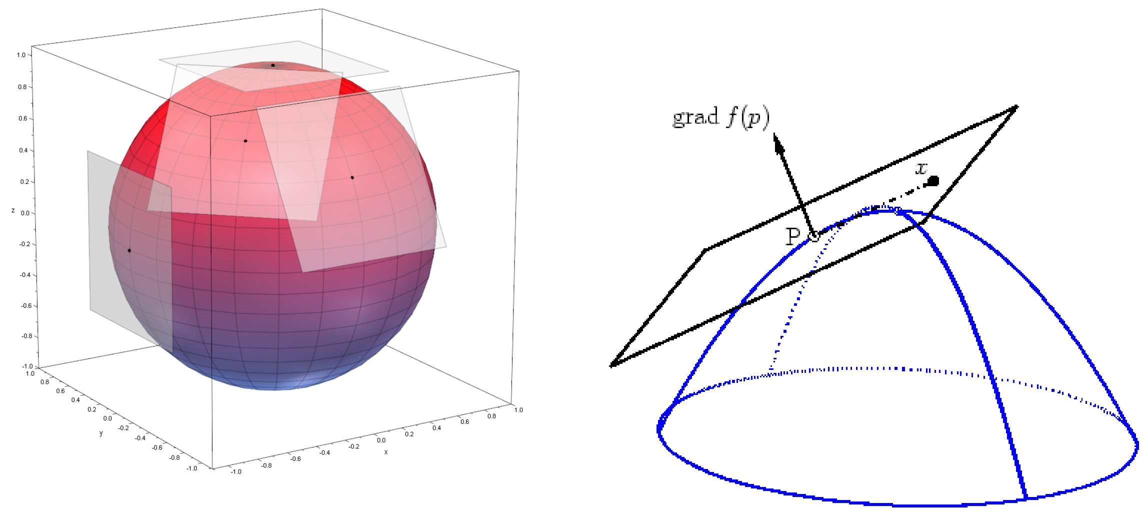
3.2.1 anschauliche Vorgehensweise

Ersatz der Funktion durch die **Tangentialebene** im Arbeitspunkt.

3.2.2 formale Vorgehensweise (Taylor-Reihe)

Es wird nur bis zur ersten Ordnung entwicklet (AP $\rightarrow$ Entwicklungsstelle).

$$\begin{aligned}
y &= f(u, z) \\
y &= \underbrace{f(u_0, z_0)}_{=y_0} + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{y=y_0 \text{ und } z=z_0} \overbrace{(u - u_0)}^{=\Delta u} + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{y=y_0 \text{ und } z=z_0} \overbrace{(z - z_0)}^{=\Delta z} \\
y - y_0 = \Delta y &= \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{y=y_0 \text{ und } z=z_0} \Delta u + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{y=y_0 \text{ und } z=z_0} \Delta z
\end{aligned}$$



(a) Tangentialebenen an einer Kugel (b) Tangentialebene mit Normalenvektor

Abbildung 1: Visualisierungen von Tangentialebenen (Quellen: http://schule.mupad.de/aktuelles/presse/bilder/data/grafiken/tangentialebene.png und http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/inhalt/aussage/aussage542/img7.png

3.3 Linearisierung einer nichtlinearen Dgl.

Zuerst muss die Gleichung nach der **höchsten Ableitung** umgestellt werden (in technischen Systemen ist die Variable, die mit der höchsten Ableitung vorkommt i.d.R. die Ausgangsgröße). Unser Bsp.:

$$\dot{y} = f(y,u) = y(y-1) + u$$

Dann wird eine **Taylor-Reihen-Entwicklung** für eine Funktion mit mehreren Varaiblen bis zur ersten Ordnung durchgeführt. Die Entwicklungsstelle ($u \to u_0$ usw.) ist ein möglicher Arbeitspunkt (AP-Ruhelage). Der AP zeichnet sich dadurch aus, dass alle zeitlichen Ableitungen null sind (nicht lineare Systeme haben unendlich viele Ruhelagen).

$$\begin{aligned}
\dot{y} &= \underbrace{f(y_0,u_0)}_{=\dot{y}_0} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{y=y_0 \text{ und } u=u_0} \Delta y + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{y=y_0 \text{ und } u=u_0} \Delta u \\
\underbrace{\dot{y}-\dot{y}_0}_{=\Delta\dot{y}} &= \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{y=y_0 \text{ und } u=u_0} \Delta y + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{y=y_0 \text{ und } u=u_0} \Delta u \\
\Delta\dot{y} &= \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{y=y_0 \text{ und } u=u_0} \Delta y + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{y=y_0 \text{ und } u=u_0} \Delta u
\end{aligned}$$

Nun muss man die einzelnen partiellen Ableitungen (im AP!) ausrechnen. Dabei sind

die anderen Variablen jeweils als konstant zu betrachten.
In unserem Beispiel (man beachte die Indizes bei y_0 und u_0):

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{y=y_0 \text{ und } u=u_0} &= 1 \\
\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{y=y_0 \text{ und } u=u_0} &= 2y_0 - 1
\end{aligned}
$$

Jetzt kann man die part. Ableitungen einsetzten:

$$\Delta\dot{y} = (2y_0 - 1)\,\Delta y + 1 \cdot \Delta u$$

4 Partial-Bruch-Zerlegung (PBZ)

4.1 Methode 1

4.1.1 reelle einfache Pole

$$\begin{aligned} G &= \frac{k(b_n \cdot s^n + \ldots + b_1 \cdot n + b_0)}{(s-\alpha_1)\cdot \ldots \cdot (s-\alpha_n)} \rightarrow \text{Nenner in Faktoren, entspricht Reihenschaltung} \\ &= c_0 + \frac{c_1}{s-\alpha_1} + \ldots + \frac{c_n}{s-\alpha_n} \rightarrow \text{PBZ-Darstellung, entspricht Parallelschaltung} \\ &= \frac{b_n \cdot s^n + \ldots + b_1 \cdot s + b_0}{a_n \cdot s^n + \ldots + a_1 \cdot s + a_0} \rightarrow \text{Zähler- und Nennerpolynom ausmultipliziert} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_0 &= k \cdot \cancel{b_n} = \frac{\cancel{b_n}}{a_n} = \frac{1}{a_n} \\ c_i &= \lim_{s\to\alpha_i} \left(G(s)\cdot(s-\alpha_i)\right) \rightarrow \text{mit i=1,2,...,n} \end{aligned}$$

c_0 ist normal null (wenn es ein echter Bruch ist → Nennergrad > Zählergrad).

4.1.2 mehrfach reelle Pole

$$\begin{aligned} G &= \frac{k(b_n \cdot s^n + \ldots + b_1 \cdot n + b_0)}{(s-\alpha_1)^{n_1}\cdot(s-\alpha_n)^{n_2}\cdot\ldots} \\ &= c_0 \quad + \frac{c_{11}}{s-\alpha_1} \quad + \frac{c_{21}}{s-\alpha_2} \quad + \ldots \\ &\qquad + \frac{c_{12}}{(s-\alpha_1)^2} \quad + \frac{c_{22}}{(s-\alpha_2)^2} \quad + \ldots \\ &\qquad + \vdots \quad + \vdots \quad + \ldots \\ &\qquad + \frac{c_{1n_1}}{(s-\alpha_1)^{n_1}} \quad + \frac{c_{2n_2}}{(s-\alpha_2)^{n_2}} \quad + \ldots \\ &= \frac{b_n \cdot s^n + \ldots + b_1 \cdot s + b_0}{a_n \cdot s^n + \ldots + a_1 \cdot s + a_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_0 &= k \cdot \cancel{b_n} = \frac{\cancel{b_n}}{a_n} = \frac{1}{a_n} \\ c_{ij} &= \frac{1}{(n_i-j)!}\left\{\frac{d^{n_i-j}}{ds^{n_i-j}}\left(G(s)\cdot(s-\alpha_i)^{n_i}\right)\right\}\Bigg|_{s=\alpha_i} \\ &\rightarrow \text{mit i=Polnummer und j=Laufnummer} \\ &\rightarrow n_i = s \text{ Vielfachheit des } i\text{-ten Poles} \end{aligned}$$

4.2 Methode 2

4.2.1 Bedingung

- Der **Nennergrad** muss **größer** sein wie der **Zählergrad**. Ist der Nennergrad kleiner oder gleich dem Zählergrad ist eine Polynomdivison mit Rest durchzuführen (alternativ mit Taschenrechner).

4.2.2 Ansatz für einfache reelle Nullstellen

$$G = \frac{C_1}{s-\alpha_1} + \frac{C_2}{s-\alpha_2} + \ldots + \frac{C_n}{s-\alpha_n} \tag{4.2.1}$$

Beispiel:

$$\frac{2s+3}{(s-2)(s+5)} = \frac{C_1}{s-2} + \frac{C_2}{s+5} \text{ hier: } \alpha_1 = 2 \text{ und } \alpha_2 = -5$$

4.2.3 Ansatz für mehrfache reelle Nullstellen

$$G = \frac{C_1}{s-\alpha_1} + \frac{C_2}{(s-\alpha_1)^2} + \ldots + \frac{C_n}{(s-\alpha_1)^n} \tag{4.2.2}$$

n ist die Vielfachkeit der Nullstelle. Zum Beispiel:

$$\frac{2s+3}{(s-2)^2(s+5)} = \frac{A_1}{(s-2)^{(1)}} + \frac{A_2}{(s-2)^2} + \frac{B_1}{s+5} \text{ hier: } n = 2$$

4.2.4 Ansatz für einfache komplexe Nullstellen

Wenn ein Polynom $s^2 + as + b^2$ keine reele Lösungen besitzt lässt man es im Ansatz so stehen und bildet die Koeffizienten wie folgt:
(Bemerkung: Bei **reellen Koeffizienten** kann es nur konjungiert komplexe Nullstellen geben! Unsere Koeffizienten sind zum Beispiel ohmsche Widerstände, Induktivitäten, Massen und Massenträgheitsmomente → reell.)

$$G = \frac{C_1 s + C_2}{s^2 + as + b} \tag{4.2.3}$$

Beispiel:

$$G = \frac{3s^3 + s^2 - 1}{s^2(s^2+s+1)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s^2} + \frac{C_1 + C_2 s}{s^2 + s - 1}$$

weiteres Beispiel:

$$\begin{aligned}
G &= \frac{5s^2+4}{s^4+5s^2+4} \\
&\rightarrow s^4 + 5s^2 + 4 = (s^2+1)(s^2+4) \text{ die konjungiert komplexen Nullstellenpaare sind } \pm i \text{ und } \pm 2i \\
G &= \frac{A_1 + A_2 s}{s^2+1} + \frac{B_1 + B_2 s}{s^2+4} \text{ Hinweis: } \pm i^2 = -1 \text{ und } (\pm 2i)^2 = -4
\end{aligned}$$

4.2.5 Möglichkeiten zur Bestimmung der Koeffizienten

Anhand von zwei Beispielen sollen zuerst der **Koeffizientenvergleich** und dann das **Nullstellen einsetzen** erklärt werden.
Beispiel 1:

$$
\begin{aligned}
G = \frac{6s^2 - s + 1}{s^3 - s} &= \frac{6s^2 - s + 1}{s(s^2 - 1)} = \frac{6s^2 - s + 1}{s(s-1)(s+1)} \\
\frac{6s^2 - s + 1}{s(s-1)(s+1)} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s-1} \text{ jetzt mit dem Nenner durchmultiplizieren} \\
6s^2 - s + 1 &= A(s+1)(s-1) + Bs(s-1) + Cs(s+1) \\
&= s^2(A + B + C) + s(C - B) - A
\end{aligned}
$$

Koeffizientenvergleich:

$$
\begin{aligned}
6 &= A + B + C \\
-1 &= C - B \\
-1 &= A \rightarrow A = -1 \\
&\rightarrow C = 3 \\
&\rightarrow B = 4 \\
G &= \frac{-1}{s} + \frac{4}{s+1} + \frac{3}{s-1}
\end{aligned}
$$

Beispiel 2 (Anfang wie bei Beispiel 1):

$$
\begin{aligned}
&\dots \\
6s^2 - s + 1 &= A(s+1)(s-1) + Bs(s-1) + Cs(s+1)
\end{aligned}
$$

Nullstellen (0,-1,1) einsetzten.

$$
\begin{aligned}
\text{mit} \quad & s = 0 \\
1 \quad = \quad & A(1)(-1) = -A \rightarrow A = -1 \\
\text{mit} \quad & s = -1 \\
8 \quad = \quad & 2B \rightarrow B = 4 \\
\text{mit} \quad & s = 1 \\
6 - 1 + 1 \quad = \quad & 6 = 2C \rightarrow C = 3
\end{aligned}
$$

Würde man nicht die Nullstellen einsetzten (bei mehrfachen Nullstellen kann man eine Nullstelle ja nur einmal einsetzen → man hat dann zu wenige), so ergibt sich ein einfach zu lösendes Gleichungssystem. Dazu muss man selbst gewählte Werte einsetzten (z.B. -2, -1, 0, 1, 2).

5 Die Laplace-Transformation

5.1 Definition

$$G(s) = \int_0^\infty g(t) \cdot e^{-st} dt = \mathcal{L}\left\{g(t)\right\} \tag{5.1.1}$$

Dabei ist s eine komplexe Variable und $g(t) = 0$ für $t < 0$!

5.2 Rechenregeln

5.2.1 Linearität

$$\mathcal{L}\left\{c \cdot g(t)\right\} = c \cdot G(s) \tag{5.2.1}$$
$$\mathcal{L}\left\{g_1(t) \pm g_2(t)\right\} = G_1(s) \pm G_2(s) \tag{5.2.2}$$

5.2.2 Ähnlichkeitssatz

$$\mathcal{L}\left\{g(c \cdot t)\right\} = \frac{1}{c} G\left(\frac{s}{c}\right) \tag{5.2.3}$$
$$G(c \cdot s) = \left\{\frac{1}{c} g\left(\frac{t}{c}\right)\right\} \tag{5.2.4}$$

5.2.3 Dämpfungssatz

Minuszeichen im Exponenten beachten!

$$\mathcal{L}\left\{e^{-at} \cdot g(t)\right\} = G(s+a) \tag{5.2.5}$$

5.2.4 Verschiebungssatz

$$\mathcal{L}\left\{g(t-t_0) \cdot \sigma(t-t_0)\right\} = e^{-st_0} G(s) \tag{5.2.6}$$

5.2.5 Differentationssatz für die Originalfunktion

Ist die Funktion $g(t)$ für $t > 0$ differenzierbar (keine Sprünge und Ecken) und hat der Differentialquotient $g^n(t)$ eine Bildfunktion, so gilt allgemein:

$$\mathcal{L}\left\{g^n(t)\right\} = s^n G(s) - s^{n-1} g(+0) - s^{n-2} \dot{g}(+0) - \ldots - s \cdot g^{n-2}(+0) - g^{n-1}(+0) \tag{5.2.7}$$

Dabei sind $g^n(+0)$ die Grenzwerte denen $g^n(+0)$ zustreben, wenn t von rechts gegen 0 geht (Anfangsbedingungen). Sind **alle Anfangsbedingungen gleich null** (und nur dann) ergibt sich:

$$\mathcal{L}\left\{g^n(t)\right\} = s^n G(s) \tag{5.2.8}$$

5.2.6 Integrationssatz

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t g(\tau), d\tau\right\} = \frac{1}{s}G(s) \tag{5.2.9}$$

5.2.7 Faltungsintegral

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{g_1(t) * g_2(t)\right\} &= G_1(s) \cdot G_2(s) &(5.2.10)\\ &= \int_0^t g_1(\tau) \cdot g_2(t-\tau), d\tau &(5.2.11)\end{aligned}$$

Anwendung:

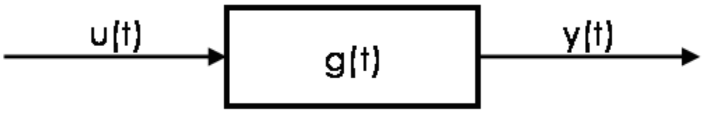


Abbildung 2: Blockschaltbild

$$\begin{aligned}y(t) &= \int_0^t g(\tau) \cdot u(t-\tau), d\tau\\ Y(s) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{y(t)\right\}\\ &= G(s) \cdot U(s)\end{aligned}$$

5.3 Endwert- und Anfangswertsatz

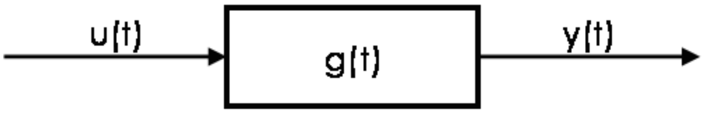


Abbildung 3: Blockschaltbild

5.3.1 Endwertsatz

$$y(t) \text{ für } t \rightarrow \infty = \lim_{s\rightarrow 0} s \cdot y(s) \tag{5.3.1}$$

Man muss **zuvor** sicherstellen, dass $y(t)$ für $t \rightarrow \infty$ existiert (mit Hilfe der Stabilitätskriterien).

5.3.2 Anfangswertsatz

$$y(t) \text{ für } t \to +0 = \lim_{s\to\infty} s \cdot y(s) \tag{5.3.2}$$

Der Anfangswert muss ein fester Wert sein (ein Dirac wäre kein fester Wert).

5.4 Tabelle wichtiger Laplace-Transformierter

Dabei ist $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{C}$. Falls nicht anders vermerkt gilt Re(s) $>$ 0.

$g(t)$ für $t > 0$	$G(s)$
1	$\frac{1}{s}$
$\delta(t)$	1
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$ für RE(s) $>$ Re(a)
t^n	$\frac{n!}{s^{(n+1)}}$
$t^n \cdot e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ für Re(s) $>$ Re(a)
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$t \cdot \sin(\omega t)$	$\frac{2\omega s}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$
$t \cdot \cos(\omega t)$	$\frac{s^2-\omega^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$
$\frac{k\omega_0^2}{s^2+2D\omega_0 \cdot s+\omega_0^2}$	$\frac{k \cdot \omega_0 \cdot e^{-D\omega_0 t}}{\sqrt{1-D^2}} \cdot \sin\left(\omega_0 t\sqrt{1-D^2}\right) \quad 0 \leq D < 1$
$\frac{k\omega_0^2}{s(s^2+2D\omega_0 \cdot s+\omega_0^2)}$	$k\left[1-e^{-D\omega_0 t}\left(\cos\left(\omega_0 t\sqrt{1-D^2}\right)+\frac{D}{\sqrt{1-D^2}}\sin\left(\omega_0 t\sqrt{1-D^2}\right)\right)\right]$ $0 \leq D < 1$

6 Blockschaltbildumformung

6.1 Reihenschaltung

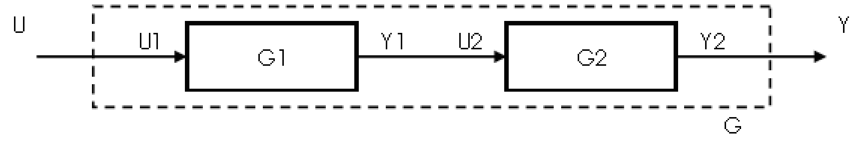


Abbildung 4: Reihenschaltung

$$G = G_1 \cdot G_2 \tag{6.1.1}$$

6.2 Parallelschaltung

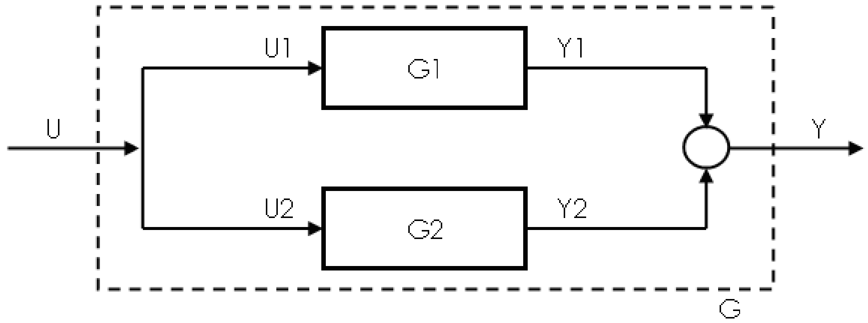


Abbildung 5: Parallelschaltung

$$G = G_1 + G_2 \tag{6.2.1}$$

6.3 Kreisschaltung

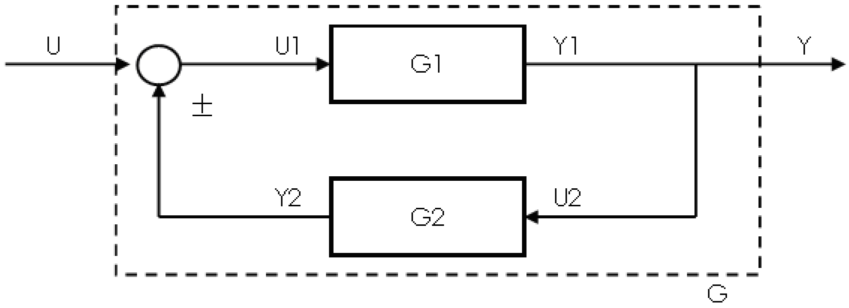


Abbildung 6: Reihenschaltung

$$G = \frac{G_1}{1 \mp G_1 \cdot G_2} \tag{6.3.1}$$

- Bei Gegenkopplung (Minus an Summationsstelle) steht im Nenner $1 + G_1 \cdot G_2$
- Bei Mitkopplung (Plus an Summationsstelle) steht im Nenner $1 - G_1 \cdot G_2$

7 Phasenminimum Systeme

7.1 Definition

- keine Pol- und Nullstellen in der rechten s-Halbebene (dürfen aber auf der Im-Achse sein)
  - damit sind sie automatisch nie instabil (sondern asymptotisch- oder grenzstabil)
- keine Totzeiten

7.2 Eigenschaften

Bei phasenminimalen Systemen kann man aus dem Verlauf des Amplitudenganges auf den Verlauf des Phasenganges schließen:

- Anhebung (+ **20 dB/Dek.**) des Amplitudenganges ergibt eine Anhebung des Phasenganges (+ **90**°)
- Absenkung (**- 20 dB/Dek.**) des Amplitudenganges ergibt eine Absenkung des Phasenganges (**- 90**°)

7.3 Zerlegung nicht phasenminimaler Systeme

Man kann jedes Nicht-Phasenminimum-System in ein Phasenminimum-System und einen Allpass zerlegen (Reihenschaltung).

7.3.1 Allpass

- $|G(j\omega)| = 1$ (für alle Frequenzen)
- Pol- und Nullstellen sind symmetrisch zu der Im-Achse (z.B. PS bei $-\frac{1}{T}$ und NS bei $\frac{1}{T}$)
- Beispiel: $G(s) = \frac{-Ts+1}{Ts+1}$

7.3.2 Beispiel

$$G(s) = \frac{-T_1 s + 1}{(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)} \text{ mit } T_i > 0 \tag{7.3.1}$$

Hier haben wir eine Nullstelle bei $\frac{1}{T_1}$ und zwei Polstellen in der linken s-Halbebene. Wäre eine Polstelle bei $-\frac{1}{T_1}$ könnte man einen Allpass bilden. Um die Gleichung nicht zu ändern wird noch eine Nullstelle bei $-\frac{1}{T_1}$ hingelegt (PS und NS heben sich auf - einfach Kürzen).

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{-T_1 s + 1}{(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)} \text{ mit } T_i > 0 \\
G(s) &= G(s) \cdot \frac{T_1 s + 1}{T_1 s + 1} = G(s) \cdot \frac{\text{Nullstelle bei } -\frac{1}{T_1}}{\text{Polstelle bei } -\frac{1}{T_1}} \\
&= \underbrace{\frac{T_1 s + 1}{(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}}_{\text{Phasenminimun-System}} \cdot \underbrace{\frac{-T_1 s + 1}{T_1 s + 1}}_{\text{Allpass}}
\end{aligned}
$$

8 Stabilitätskriterien

8.1 Definitionen

- **asymptotisch stabil** - Gewichtsfunktion (Impulsantwort) sinkt asymptotisch auf null ab.
- **grenzstabil** - Betrag der Gewichtsfunktion überschreitet mit wachsendem t einen endlichen Wert nicht oder Gewichtsfunktion strebt einem endlichen Grenzwert zu.
- **instabil** - Betrag der Gewichtsfunktion geht mit wachsendem t gegen unendlich.

8.2 einzelne Systeme (keine geschlossene Regelkreise)

8.2.1 Kriterien

- Haben **sämtliche Pole** einer Übertragungsfunktion einen **negativen Realteil**, dann ist das System **asymptotisch stabil**.
- Ist ein **einfacher reeller Pol im Ursprung** oder ein **einfacher konj. komplexer Pol** auf der **Im-Achs**e, so ist das System **grenzstabil**.
- Bei zwei- bzw. mehrfachen Polen (reell oder konj. kompl.) ist das System instabil. Sobald ein Pol in der rechtes s-Halbebene ist sowieso!

Wenn man das Nennerpolynom (Polstellen) in der Form $(s+s_1)(s+s_2)\ldots$ hat, dann kann man einfach die Stabilität anhand der oben genannten Kriterien ermitteln. Ansonsten gibt es (in dieser FoSa) **Algebraische Verfahren zur Stabilitätsanalyse**.

8.2.2 Beiwerte-Kriterium

notwendige Bedingung für das Nennerpolynom - Wenn das System asymptotisch stabil ist, müssen alle **Koeffizienten** der charakteristischen Gleichung **von null verschieden** sein und das **gleiche Vorzeichen** besitzen (Vorzeichenbedingung). Ist ein Koeffozient null, dann kann das System noch grenzstabil sein - ist aber nicht mehr asympt. stabil.

hinreichende Bedingung für Systeme 1. und 2. Ordnung - notwendige Bedingung ist gleichzeitig hinreichende Bedingung

hinreichende Bedingung für Systeme 3. Ordnung - Das System ist asymptotisch stabil, wenn $a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s^1 + a_0 = 0 \rightarrow a_0a_3 - a_1a_2 < 0$ gilt.
$\omega_{\text{kritisch}} = \sqrt{\frac{a_1}{a_3}} = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$ (Falls $\frac{a_1}{a_3} = \frac{a_0}{a_2}$ gilt, ist das System grenzstabil und schwingt mit der Frequenz ω_{kritisch})

hinreichende Bedingung für Systeme 4. Ordnung - Das System ist asymptotisch stabil, wenn $a_4a_1^2 + a_0a_3^2 - a_1a_2a_3 < 0$ (alle $a_i > 0$) ODER $a_4a_1^2 + a_0a_3^2 - a_1a_2a_3 > 0$ (alle $a_i < 0$) gilt. $\omega_{\text{kritisch}} = \sqrt{\frac{a_1}{a_3}}$

hinreichende Bedingung für Systeme 5. Ordnung - Das System ist asymptotisch stabil, wenn $a_2a_5 - a_3a_4 < 0$ UND $(a_1a_4 - a_0a_5)^2 - (a_3a_4 - a_2a_5)(a_1a_2 - a_0a_3) < 0$ gilt. $\omega^2_{\text{kritisch}} = \frac{a_3}{2a_5} \pm \sqrt{\frac{a_3^2}{4a_5^2} - \frac{a_1}{a_5}}$ für $a_3^2 - 4a_5a_1 > 0$

8.2.3 Hurwitz-Kriterium

Ein Polynom mit ($a_n > 0$)

$$\begin{aligned} p(s) &= a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1s + a_0 \\ &= a_n(s - s_1)(s - s_2)\ldots(s - s_n) \end{aligned}$$

heißt Hurwitz-Polynom, wenn alle Wurzeln $s_i (i = 1, 2, \ldots)$ einen negativen Realteil haben (Hurwitz-Polynom → asymptotisch stabil). Für die Koeffizienten eines Hurwitz-Polynom hat Hurwitz folgende **Bedingungen** angegeben:

1. alle Koeffizienten $a_i \neq 0$
2. alle Koeffizienten a_i haben ein **positives** Vorzeichen (nicht wie bei Beiwerte-Kriterium gleiches VZ!)
3. folgende n Determinanten sind positiv:

$$\begin{aligned} D_1 &= a_1 > 0 \\ D_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0 \\ D_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0 \\ &\vdots \\ D_{n-1} &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-1} \end{vmatrix} > 0 \\ D_n &= a_n \cdot D_{n-1} > 0 \end{aligned}$$

allgemein:

$$D_i = \begin{vmatrix} \searrow & \rightarrow & \rightarrow & \dots & \dots \\ \leftarrow & \searrow & \rightarrow & \dots & \dots \\ \leftarrow & \leftarrow & \searrow & \rightarrow & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \searrow & \dots \end{vmatrix} > 0$$

$$D_i = \begin{vmatrix} \searrow a_1 & \rightarrow a_0 & \rightarrow 0 & \dots & \dots \\ \leftarrow a_3 & \searrow a_2 & \rightarrow a_1 & \dots & \dots \\ \leftarrow a_5 & \leftarrow a_4 & \searrow a_3 & \rightarrow a_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \searrow a_4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} > 0$$

- i $\rightarrow$ Anzahl der Zeilen/Spalten
- $\searrow$ aufsteigend auf der Diagonalen (beginnen mit a_1)
- $\rightarrow$ kleiner (Nummer des Koeffizienten)
- $\leftarrow$ größer (Nummer des Koeffizienten)
- nicht vorhandene Koeffiziienten null setzen

8.3 geschlossene Regelkreise (Nyquist)

!Sehr verkürzte Darstellung!
Soll der geschlossene Regelkreis asymptotisch stabil sein, so muss folgende Beziehung für die stetige Phasenänderung $\Delta\varphi$ gelten:

$$\Delta\varphi = P \cdot \pi + \mu \cdot \frac{\pi}{2} \tag{8.3.1}$$

- μ ist die Anzahl der Pole auf der Im-Achse (des offenen Regelkreises $G_0(s)$)
- P ist die Anzahl der Pole auf der rechten s-Halbebene (des offenen Regelkreises $G_0(s)$)
- offener Regelkreis $G_0(s)$ beim Standardregelkreis: $G_0(s) = G_{Regler}(s) \cdot G_{Strecke}(s)$

Hinweis:
Die Aussage über die Stabilität des geschlossenen Regelkreises wird anhand der Kenntnis über den offenen Regelkreis getroffen!

Platz für eigene Ergänzungen:

9 Trigonometrische Formeln

9.1 elementare Beziehungen und Umrechnungen

$$\sin(\omega t) = -\frac{1}{2}j\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right) \tag{9.1.1}$$

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right) \tag{9.1.2}$$

$$\begin{aligned} \sin^2\varphi + \cos^2\varphi &= 1 \quad (9.1.3) \\ \rightarrow \cos^2\varphi &= 1 - \sin^2\varphi \\ \rightarrow \sin^2\varphi &= 1 - \cos^2\varphi \end{aligned}$$

$$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{1}{\cot\varphi} \tag{9.1.4}$$

	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\tan\varphi$	$\cot\varphi$
$\sin\varphi$	–	$\pm\sqrt{1-\cos^2\varphi}$	$\pm\frac{\tan\varphi}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\varphi}}$
$\cos\varphi$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\varphi}$	–	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}$	$\pm\frac{\cot\varphi}{\sqrt{1+\cot^2\varphi}}$
$\tan\varphi$	$\pm\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\varphi}}{\cos\varphi}$	–	$\frac{1}{\cot\varphi}$
$\cot\varphi$	$\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2\varphi}}{\sin\varphi}$	$\pm\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-\cos^2\varphi}}$	$\frac{1}{\tan\varphi}$	–

9.2 Additionstheoreme

$$\sin(\varphi_1 \pm \varphi_2) = \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 \pm \cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 \tag{9.2.1}$$

$$\cos(\varphi_1 \pm \varphi_2) = \cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 \mp \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 \tag{9.2.2}$$

9.3 Formeln für Winkelvielfache

9.3.1 Formeln für doppelte Winkel

$$\begin{aligned}
\sin 2\varphi &= 2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi && (9.3.1)\\
\rightarrow \frac{1}{2}\sin 2\varphi &= \sin\varphi \cdot \cos\varphi \\
\rightarrow \frac{1}{2}\sin\left[2\left(\varphi + \Delta\varphi\right)\right] &= \sin\left(\varphi + \Delta\varphi\right) \cdot \cos\left(\varphi + \Delta\varphi\right) \\
\sin^2\varphi &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\varphi) && (9.3.2)\\
\cos^2\varphi &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\varphi) && (9.3.3)
\end{aligned}$$